18/05/17.

Μεταθέσεις: Έστω $A \neq \emptyset$. Τότε $(S(A), \circ)$: ομάδα μεταθέσεων επί του A

Έστω $B \neq \emptyset$ και έστω $(S(A), \circ)$: ομ. μεταθ. του B.

Πρόταση: Αν $|A| = |B|$ τότε οι ομάδες μεταθέσεων $S(A)$ κ' $S(B)$ είναι ισόμορφες.

Αποδ: $|A| = |B| \Rightarrow \exists$ 1-1 κ' επί απεικόνιση $\varphi : A \to B$.

Ορίζουμε $\Phi : S(A) \to S(B)$, $\Phi(f) = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ (*)

Επειδή οι απεικ. φ, f, φ^{-1} είναι 1-1 κ' επί έπεται ότι και η $\Phi(f)$ είναι 1-1 κ' επί και άρα $\Phi(f) \in S(B)$.

(*)
$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^{-1}"'] & B \\ A \arrow[r, "f"] & A \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

• $\Phi(f \circ g) = \varphi \circ (f \circ g) \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ f \circ g \circ \varphi^{-1} =$

$= \varphi \circ f \circ Id_A \circ g \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ g \circ \varphi^{-1} =$

$= \Phi(f) \circ \Phi(g) \Rightarrow \Phi$ ομομορφισμός ομάδων

• Έστω $f \in Ker(\Phi) \Rightarrow \Phi(f) = Id_B \Rightarrow \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = Id_B \Rightarrow$

$\Rightarrow f = Id_A$. Άρα Φ είναι μονομορφισμός.

• Έστω $g \in S(B)$. Ψάχνω $f \in S(A)$: $\Phi(f) = g \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi \circ f \circ \varphi^{-1} = g \Rightarrow$ / $f = \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi$ /. Τότε πράγματι:

$\Phi(\varphi^{-1} \circ g \circ \varphi) = \varphi \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi \circ \varphi^{-1} = g \Rightarrow \Phi$ επιμορφισμός

Άρα Φ: ισομορφισμός.

Πόρισμα: Αν $A \neq \emptyset$ με $|A| = n$ τότε οι ομάδες $S(A)$ και S_n είναι ισόμορφες.

Αποδ. $S(\{1, \ldots, n\}) = S_n$: n-οστή συμμ. ομάδα

Τότε ο ισχυρισμός προκύπτει από την πρόταση

Θεώρημα Cayley: Κάθε ομάδα G είναι ισόμορφη με μια υποομάδα της ομάδας μεταθέσεων επί ενός κατάλληλου συνόλου. Ιδιαίτερα αν $|G|=n$, τότε η G είναι ισόμορφη με μια υποομάδα της S_n.

Απόδειξη: Θεωρούμε την ομάδα μεταθέσεων $(S(G),\circ)$ επί του συνόλου G και ορίζουμε απεικόνιση
$L: G \to S(G)$ $\quad g \longmapsto L(g) := L_g$ (← μία μετάθεση του G) $: G \to G$
δηλαδή $x \longmapsto L_g(x) = g\cdot x$

• Η απεικόνιση L είναι καλά ορισμένη (αρκεί νδο η L_g είναι μετάθεση του G) δηλαδή $\forall g\in G : L_g \in S(G)$ δηλ. η L_g είναι 1-1 κ' επί.

– Αν $L_g(x)=L_g(y) \to g\cdot x = g\cdot y \overset{\text{Νόμος}}{\underset{\text{Διαγρ.}}{\Rightarrow}} x=y,\ \forall x,y\in G \Rightarrow L_g: 1\text{-}1$

– Η L_g είναι επί, διότι $\forall y\in G : L_g(g^{-1}\cdot y) = g(g^{-1}\cdot y) = y$
Άρα L_g 1-1 κ' επί

• Τώρα νδο $\forall g_1, g_2 \in G : L(g_1\cdot g_2) = L(g_1)\circ L(g_2)$
δηλαδή $L_{g_1g_2} = L_{g_1}\circ L_{g_2}$

$\forall x\in G : L_{g_1g_2}(x) = (g_1 g_2)x$

$(L_{g_1}\circ L_{g_2})(x) = (L_{g_1}(L_{g_2}(x))) = L_{g_1}(g_2x) = g_1(g_2x)$

Άρα L: ομομορφισμός.

• Έστω $g\in Ker(L) \Rightarrow L(g) = e_{S(G)} \Rightarrow L_g = Id_G \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall x\in G : L_g(x) = Id_G(x) \Rightarrow \forall x\in G\ g\cdot x = x \Rightarrow$
$\Rightarrow$ για $x=e$: $ge=e \Rightarrow g=e \Rightarrow Ker(L)=\{e\} \Rightarrow$
$\Rightarrow L$: μονομορφισμός.

Άρα τελικά $G \cong Im(L) \leq S(G)$
Έστω $|G| = n < \infty$. Τότε $S(G)\cong S_n$ μέσω ενός ισομορφισμού $\Phi: S(G)\to S_n$. Θεωρούμε τη σύνθεση:

$\Phi \circ L : G \to S_n$ η οποία είναι μονομορφισμός ομάδων

και άρα: $G \cong Im(\Phi \circ L) \leq S_n$

<u>Ορισμός</u>: Αν G: ομάδα τότε ο μονομορφισμός L καλείται η <u>αριστερή</u> <u>κανονική</u> <u>αναπαράσταση</u> της G.

Αν $G = \langle \alpha \rangle = \{e, \alpha, \alpha^2\}$: κυκλική τάξης 3. Θα υπολ την $G \cong Im(\Phi \circ L) \leq S_3$

Θεωρούμε την 1-1 κ' επί απεικ. $\varphi : G \to \{1, 2, 3\}$

$e \mapsto 1$, $\alpha \mapsto 2$, $\alpha^2 \mapsto 3$. Η φ ορίζει έναν ισομορφισμό ομάδων $\Phi : S(G) \to S_3$

$$\begin{matrix} e \mapsto \alpha \\ \alpha \mapsto \alpha^2 \\ \alpha^2 \mapsto e \end{matrix} \xmapsto{\Phi} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \rho_1$$

$Im(L) = \{L_e, L_\alpha, L_{\alpha^2} \in S(G)\}$

$$L_e \begin{cases} e \mapsto e\,e = e \\ \alpha \mapsto e \cdot \alpha = \alpha \\ \alpha^2 \mapsto e \cdot \alpha^2 = \alpha^2 \end{cases} \qquad L_\alpha : \begin{cases} e \mapsto \alpha \cdot e = \alpha \\ \alpha \mapsto \alpha \cdot \alpha = \alpha^2 \\ \alpha^2 \mapsto \alpha \cdot \alpha^2 = e \end{cases}$$

$L_e \xrightarrow{\Phi} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = i$, $\quad L_\alpha \xrightarrow{\Phi} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \rho_1$

$$L_{\alpha^2} : \begin{cases} e \mapsto \alpha^2 e = \alpha^2 \\ \alpha \mapsto \alpha^2 \alpha = e \\ \alpha^2 \mapsto \alpha^2 \alpha^2 = \alpha \end{cases}$$

$L_{\alpha^2} \xrightarrow{\Phi} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \rho_2$

και άρα $G \cong Im(\Phi \circ L) = \{i, \rho_1, \rho_2\} = \langle \rho_1 \rangle \leq S_3$

<u>Η Συμμετρική Ομάδα, S_n, $n \geq 1$.</u>

$\forall \sigma \in S_n : \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

<u>Ορισμός</u>: Ένας κύκλος στην S_n, $n \geq 1$ είναι μια μετάθεση $\sigma \in S_n$ για την οποία υπάρχει $\{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$

έτσι ώστε: $\sigma(i_1)=i_2, \sigma(i_2)=i_3, \dots, \sigma(i_{k-1})=i_k, \sigma(i_k)=i$
~~και~~ $\sigma(j)=j \ \forall j\in\{1,\dots,n\}\setminus\{i_1,\dots,i_k\}$ και τότε η σ καλείται κύκλος μήκους k και θα συμβολίζεται με: $(i_1, i_2, \dots, i_k)=\sigma$.

Π.χ.: ① $S_1=\{i\}=\{(1)\}$

② $S_2=\left\{i, \begin{pmatrix}1&2\\2&1\end{pmatrix}\right\}=\{i, (1\ 2)\}$

③ $S_3=\left\{i, \mu_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}, \mu_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}, \mu_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\right.$
$\left. \rho_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}, \rho_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\right\}=$
$=\{i, (2\ 3), (1\ 3), (1\ 2), (1\ 2\ 3), (1\ 3\ 2)\}$

④ Στην S_4 η μετάθεση $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$ δεν είναι κύκλος στην S_4. Όμως υπάρχουν ~~α~~ δύο κύκλοι μήκους 2 στην σ, οι: $\sigma_1=(1\ 2)$, $\sigma_2=(3\ 4)$ και ισχύει: $\sigma_1\circ\sigma_2=(1\ 2)\cdot(3\ 4)=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}=\sigma$

Ορισμός: Δύο κύκλοι $\sigma=(i_1,\dots,i_k)$ και $\tau=(j_1,\dots,j_\lambda)$ στην S_n καλούνται ξένοι $\Leftrightarrow \{i_1,\dots,i_k\}\cap\{j_1,\dots,j_\lambda\}=\emptyset$.

Έστω $\sigma=(i_1,\dots,i_k)\in S_n$ κύκλος μήκους k. Τότε:
$i_2=\sigma(i_1)$, $i_3=\sigma(i_2)=\sigma(\sigma(i_1))=\sigma^2(i_1), \dots, i_k=\sigma^{k-1}(i_1)$
και $\sigma^k(i_1)=i_1$. Άρα $\sigma=(i_1 \dots i_k)=(i_1\ \sigma(i_1)\dots\sigma^{k-1}(i_1))$
$(i_2\ i_3 \dots i_k\ i_1)=\sigma$
$(i_3\ i_4 \dots i_k\ i_2\ i_1)=\sigma$